Cornel MARIN **Anton HADĂR**

METODE NUMERICE ȘI APLICAȚII ÎN INGINERIA MECANICĂ

Târgovişte, 2020

Valahia University Press
str. Aleea Sinaia, nr. 13, Târgovişte
Acreditată de CNCSIS cu avizul 280 din mai 2007.

Editura ZVEN
str. Boerescu Zaharia, nr. 2, R3/3
130059, Târgovişte, Dâmboviţa
tel/fax: 0345 401 330; mobil 0765 464 304
zven.print@gmail.com | www.zven.ro

Procesare text: Andrei Toma
Tehnoredactare: Cornel Marin
Coperta: ZVEN Print

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
MARIN, CORNEL
Metode numerice și aplicații în ingineria mecanică / Cornel Marin, Anton Hadăr. - Târgovişte: Valahia University Press: Editura ZVEN, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-603-196-7
ISBN 978-606-8955-60-5

I. Hadăr, Anton

51

TIPARUL EXECUTAT LA TIPOGRAFIA:
ZVEN PRINT
www.zven.ro
zven.print@gmail.com
tel./fax: 0345 401 330
mobil: 0765 464 304
str. Gabriel Popescu, nr. 3, Târgovişte, Dâmboviţa

CORNEL MARIN
ANTON HADĂR

METODE NUMERICE
ȘI APLICAȚII ÎN INGINERIA MECANICĂ

Recenzia ştiinţifică:

Conf. dr. mat. Emil LUNGU
(Universitatea VALAHIA din Târgoviște)

CUVÂNT-ÎNAINTE

Metodele numerice reprezintă o disciplină importantă a Matematicilor aplicate având ca obiect rezolvarea unor ecuaţii, sisteme de ecuaţii, ecuaţii diferenţiale etc., ce caracterizează fenomene fizice din inginerie şi care nu pot fi rezolvate folosind formule şi metode clasice.

La baza disciplinei Metode numerice ce se studiază de către studenții de la profilul tehnic stau disciplinele: Algebră, Geometrie Analitică și Diferențială, Analiză matematică, Matematici speciale etc. Aceste metode numerice permit găsirea soluţiei unei ecuaţii ce satisface condiţiile la limită, soluție ce este compatibilă cu rezultatele obținute experimental pe un prototip sau echipamentul *insitu*, cu o precizie ce se încadrează într-o clasă de precizie acceptabilă din punct de vedere al inginerului. În ultimele decenii softurile specifice metodelor numerice s-au dezvoltat foarte mult, în special datorită progresului din domeniul tehnicii de calcul și apariției programelor profesionale de calcul (de exemplu MATHCAD, MATEMATICA etc.). Un exemplu este Metoda elementului finit care permite rezolvarea unui sistem cu un număr foarte mare de ecuaţii într-un timp foarte scurt şi cu o precizie foarte bună, sistem ce se obține pe baza metodelor variaționale.

Aproximarea numerică a soluțiilor unor ecuații neliniare, de exemplu, a fost una dintre cele mai vechi încercări de rezolvare a unor probleme complexe ce a preocupat de-a lungul timpului pe marii matematicieni: metodele numerice folosite în prezent poartă numele acestor matematicieni și stau la baza algoritmilor de calcul. Printre aceste nume amintim: Isaac Newton (1642-1727), Leonard Euler (1707-1783), I.K.G. Gauss (1777-1855), K.G. Jacobi (1804-1855), B. Taylor (1685-1731), J.L. Lagrange (1736-1813), J.J.B. Fourier (1768-1830).

De remarcat este faptul că în ultima perioadă s-a dezvoltat foarte mult *metoda elementelor finite* ce a dus la apariţia unor programe software profesionale de analiză structurală, dinamică, termică, de mecanica fluidelor, electrotehnică etc. precum: ANSYS, ADYNA, PROMECANICA, COSMOS, NASTRAN, PATRAN, INVENTOR, CATIA etc. Aceste software profesionale au la baza algoritmilor de calcul metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor liniare obținute în urma aplicării principiilor calculului variaţional pentru anumite subdomenii numite elemente finite.

În prezenta lucrare sunt prezentate metodele numerice clasice într-o manieră accesibilă studenților de la facultățile de Inginerie din primul an de studiu, care posedă cunoştinţe elementare de Analiză matematică, Algebră și Geometrie analitică şi diferenţială.

Primele opt capitole ale lucrării permit abordarea și rezolvarea unor probleme tehnice din domeniul ingineriei mecanice: metode aproximative de rezolvare a ecuaţiilor algebrice transcendente, metode exacte şi aproximative de rezolvare a sistemelor se ecuaţii liniare și neliniare, metodele exacte şi aproximative de determinare a valorilor şi vectorilor proprii ai unei matrice, calculul cu diferenţe finite pentru interpolarea și pentru derivarea funcţiilor, funcții de interpolare pentru aproximarea funcţiilor de o variabilă, metode de derivare numerică cu diferenţe finite și cu dezvoltări în serie TAYLOR a unei funcții, metode de integrare numerică cu interval închis sau deschis (metode de cuadratură), metode de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. În capitolul 9 sunt prezentate metode matriciale pentru calculul grinzilor continue şi *metoda deplasărilor* pentru cazul particular al sistemelor mecanice plane formate din bare drepte articulate sau sudate în noduri.

Lucrarea de față se adresează în primul rând studenţilor de la profilul tehnic şi în special studenților de la profilul Inginerie mecanică, fiind utilă, în aceeaşi măsură, inginerilor, cercetătorilor precum şi tuturor celor ce doresc să utilizeze calculul numeric pentru rezolvarea unor aplicaţii practice de inginerie mecanică.

Ne exprimăm speranţa că această lucrare, prin aplicațiile prezentate, a surprins aspectele esenţiale ale problematicii disciplinei Metode numerice din inginerie, fiind rezultatul experienței personale de predare a cursului de *Metode numerice* studenților facultății tehnice din cadrul Universității VALAHIA din Târgoviște și a Universității POLITEHNICA București.

Autorii,

Ianuarie 2020

CUPRINS

Cuvânt-înainte 5

CAPITOLUL I
METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE TRANSCENDENTE.. 11

Introducere... 11
1.1. Metoda aproximaţiilor succesive bazată pe teorema de punct fix (metoda bisecţiei) 12
1.2. Metoda coardei şi metoda secantei 14
1.3. Metoda tangentelor de ordinul I (NEWTON-RAPHSON).............................. 16
1.4. Metoda tangentelor de ordinul II 18
1.5. Metoda parabolelor (BLUMENFELD) 20
1.6. Metoda iteraţiilor succesive... 22
1.7. Extragerea rădăcinii de ordinul *k* dintr-un număr pozitiv 23

CAPITOLUL II
SISTEME DE ECUAŢII LINIARE ŞI NELINIARE... 25

Introducere... 25
2.1. Metoda eliminării succesive GAUSS 25
2.2. Metoda eliminării succesive GAUSS îmbunătăţită pentru matricea bandă simetrică 30
2.3. Metoda eliminării totale GAUSS-JORDAN.. 35
2.4. Metoda factorizării LU (CHOLESKI)... 39
2.5. Metoda iterativă JACOBI... 42
2.6. Metoda iterativă GAUSS-SEIDEL... 45
2.7. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii neliniare...................................... 46
    2.7.1. Metoda iteraţiilor simple JACOBI 46
    2.7.2. Metoda NEWTON-RAPHSON.. 49
    2.7.3. Metoda gradientului sau a celei mai mari pante 55

CAPITOLUL III
CALCULUL VALORILOR ŞI VECTORILOR PROPRII AI UNEI MATRICE

MATRICE.. 59
Introducere.. 59
3.1. Metoda DANILEVSKI pentru valori și vectori proprii 60
3.2. Metoda KRÎLOV pentru calculul valorilor și vectorilor proprii 67
3.3. Metoda LEVERRIER pentru determinarea valorilor proprii 72
3.4. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi... 74
3.5. Metoda polinomului caracteristic cu diferențe finite progresive 76
3.6. Metoda iteraţiei matriceale pentru calculul valorilor proprii........................... 78

CAPITOLUL IV

CALCULUL NUMERIC CU DIFERENŢE FINITE... 87
4.1. Diferenţe finite progresive 87
4.2. Diferenţe finite regresive...90
4.3. Diferenţe finite centrale...93

CAPITOLUL V

METODE NUMERICE DE INTERPOLARE A FUNCŢIILOR 97
Introducere..97
5.1. Interpolarea folosind funcții polinomiale 98
5.2. Interpolarea folosind polinoame LAGRANGE...100
5.3. Interpolarea folosind polinoame HERMITE...102
5.4. Interpolarea cu diferenţe finite progresive. Prima formulă a lui NEWTON..... 104
5.5. Interpolarea cu diferenţe finite regresive. A doua formulă a lui NEWTON 108
5.6 Interpolarea cu diferenţe finite centrale. Formula lui STIRLING 110
5.7. Interpolarea polinomială NEWTON cu diferenţe divizate 112
5.8. Aproximarea funcțiilor periodice prin dezvoltări în serie FOURIER........115
5.9. Aproximarea funcțiilor prin metoda celor mai mici pătrate 121
5.10. Interpolarea cu funcţii spline 124

CAPITOLUL VI

METODE NUMERICE DE DERIVARE A FUNCȚIILOR 131
6.1. Derivarea numerică folosind funcții polinomiale de interpolare 131
6.2. Derivarea numerică folosind polinoamele de interpolare LAGRANGE....134

6.3. Derivarea numerică folosind polinoame de interpolare GREGORY-NEWTON cu diferenţe finite progresive 140
6.4. Derivarea numerică folosind polinoame de interpolare GREGORY-NEWTON cu diferenţe finite regresive 143
6.5. Derivarea numerică folosind polinoame de interpolare STIRLING cu diferenţe finite centrale 146
6.6. Derivarea numerică folosind dezvoltarea în serie TAYLOR....................150
6.7. Derivarea numerică folosind calculul simbolic cu diferențe finite progresive 151
6.8. Derivarea numerică folosind calculul simbolic cu diferențe finite regresive....................................154
6.9. Derivarea numerică folosind calculul simbolic cu diferențe finite centrale.......157

CAPITOLUL VII
METODE NUMERICE DE INTEGRARE PRIN CUADRATURI 161
Introducere....................................161
7.1. Cuadratura NEWTON-COTES cu interval închis....................................162
7.2. Formulele generale ale cuadraturii NEWTON-COTES cu interval închis........168
7.3. Cuadratura GAUSS-LEGENDRE cu interval deschis 170
7.4. Cuadratura CEBÎȘEV cu interval deschis....................................178
7.5 Formula de integrare folosind extrapolarea RICHARDSON 181
7.6. Formule de integrare numerică EULER MACLAURIN 183

CAPITOLUL VIII
METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE 187
Introducere....................................187
METODE DE REZOLVARE UNIPAS....................................188
8.1. Metoda unipas a dezvoltării în serie TAYLOR....................................188
8.2. Metoda unipas EULER 192
8.3. Metoda unipas RUNGE-KUTTA 196
8.4. Metoda unipas RUNGE-KUTTA pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea....................................202
METODE MULTIPAS 205
8.5. Metoda multipas ADAMS 205
8.6. Metoda multipas ADAMS-BASHFORTH 211

CAPITOLUL IX
APLICAȚII ALE METODELOR NUMERICE ÎN INGINERIA MECANICĂ 217
9.1. Metode matriceale pentru calculul grinzilor continue 217
9.1.1. Grinda continuă situată pe trei reazeme punctuale rigide........ 217
9.1.2. Grinda continuă situată pe patru reazeme punctuale rigide........ 220
9.1.3. Grinda continuă situată pe cinci reazeme punctuale rigide 224
9.1.4. Grinda continuă situată pe șase reazeme punctuale rigide 228
9.2. Metoda deplasărilor pentru calculul sistemelor formate din bare drepte articulate și sudate în noduri (grinzi cu zăbrale) 232
9.2.1. Metoda deplasărilor în cazul sistemelor de tip bară dreaptă 233
9.2.2. Metoda deplasărilor în cazul grinzilor cu zăbrele solicitate de forțe situate în planul lor (ARTICULATE) 234
9.2.3. Metoda deplasărilor în cazul sistemelor plane de bare sudate în noduri solicitate de forțe cuprinse în planul lor (CADRE PLANE) 237
9.2.4. Metoda deplasărilor în cazul sistemelor plane de bare sudate în noduri solicitate de forțe perpendiculare pe planul lor (GRILAJ)........ 244
9.3. Metoda energetică RAYLEIGH-RITZ pentru calculul deplasărilor în barele elastice supuse la încovoiere........ 250

Bibliografie 253

CAPITOLUL I
METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE TRANSCENDENTE

Introducere

Există puține clase de ecuații ale căror soluții pot fi calculate exact pe baza unor formule. De exemplu: ecuații algebrice de grad mai mic sau egal decât patru, ecuații algebrice reciproce, ecuații binome, ecuații algebrice cu coeficienți întregi care admit soluții raționale, ecuații trigonometrice fundamentale sau reductibile la acestea, diferite tipuri de ecuații exponențiale și logaritmice, etc. Toate aceste ecuații reprezintă cazuri particulare care apar destul de rar în aplicațiile practice inginerești.

În afara acestor cazuri speciale de ecuații pentru care ce pot găsi soluții analitice, singurele metode viabile pentru determinarea soluțiilor celorlalte ecuații rămân metodele numerice, aproximative. Aceste soluții produc șiruri convergente către soluția exactă a ecuației. Cum generarea unui șir infinit este practic imposibilă, algoritmii de calcul numeric generează un șir finit de termeni, până când se satisface un criteriu de oprire ce implică atingerea unui număr maxim de iterații sau obținerea unei precizii de calcul satisfăcătoare. Pentru rezolvarea numerică a unor astfel de ecuaţii transcendente este necesar să se identifice mai întâi intervalul în care se află rădăcina ecuaţiei.

Din Analiza matematică se cunosc condițiile suficiente pentru ca o ecuație să admită o soluție pe un interval (de exemplu o funcție continuă care schimba semnele la capetele intervalului va avea cel puțin o soluție in acel interval).

De exemplu, funcția $f(x)=x^2$ are o rădăcină pe intervalul [-1,1] deși nu schimbă semnul, și nu este monotonă. Doar monotonia strictă a unei funcției asigură injectivitatea și prin urmare unicitatea soluției. Cele două condiţii sunt echivalente cu următoarele ipoteze:

– $f:[a,b]\to R$ este o funcţie continuă şi strict monotonă; (1.1)

– $f(a)\cdot f(b)<0 \quad \begin{cases} f(a)<0, & f(b)>0 \\ f(a)>0, & f(b)<0 \end{cases}$ (1.2)

rezultă că $f(x)$ are numai o singură soluţie pe $[a,b]$.

Cele mai utilizate metode numerice pentru calculul aproximativ al soluţiilor unei ecuaţii transcendente sunt prezentate în continuare.

1.1. Metoda aproximațiilor succesive bazată pe teorema de punct fix (metoda bisecției)

Este cea mai simplă și intuitivă metodă iterativă de determinare aproximativă a rădăcinii unei ecuaţii $f(x)=0$ ce se află în intervalul $[a,b]$.

Se verifică mai întâi dacă sunt îndeplinite ipotezele (1.1) și (1.2). Metoda bisecției sau a înjumătăţirii intervalului se bazează pe următorul algoritm:

1. se verifică schimbarea semnului funcției la capetele intervalului $[a,b]$;
2. se calculează valoarea funcţiei $f(x)$ la mijlocul intervalului $[a,b]$:
3. în funcție de semnele funcţiei $f(x)$ în cele trei puncte ale intervalului (a, c, b) se determină următorul subinterval în care se află rădăcina ξ (Figura 1.1)

Sunt posibile următoarele variante prezentate în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

f(a)	***f(b)***	***f(c₁)***	***Rădăcina ξ***
-	+	+	$\xi \in (a,c_1)$
-	+	-	$\xi \in (c_1,b)$
+	-	+	$\xi \in (c_1,b)$
+	-	-	$\xi \in (a,c_1)$

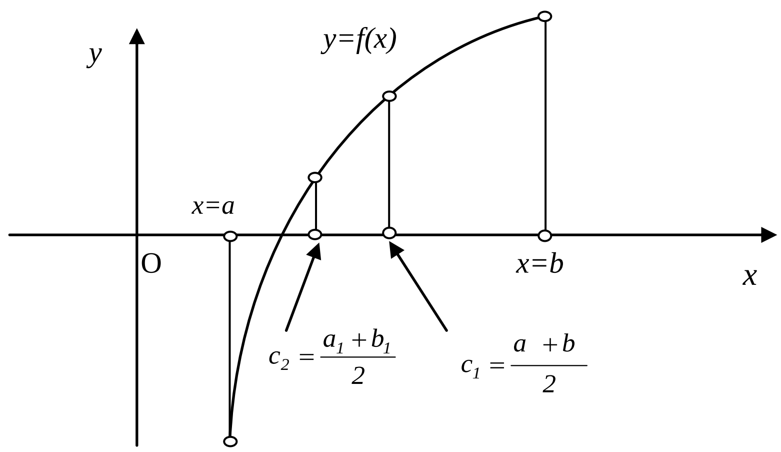

Fig.1.1

BIBLIOGRAFIE

1.	Anghel, V., Pastramă, Ş. D., Mareş, C.	-	*Metode şi programe pentru calculul structurilor. Noţiuni teoretice şi aplicaţii în Matlab*, Ed. UP Bucureşti, 1998
2.	Berbente , C, ş.a.	-	*Metode numerice de calcul şi aplicaţii*, Editura U.P. Bucureşti, 1992
3.	Ciarlet, G. Phillipe, Lions, J, L.	-	*Analyse numerique maricielle et optimisation*
4.	Demidovici, B., Maron	-	*Elements de calcul numerique*, Editura Mir, Moscova
5.	Pacoste, C., Stoian, V., Dubină, D.	-	*Metode moderne în mecanica structurilor*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1988
6.	Salvadori, M. G, Baron, M. L.	-	*Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti 1972, traducere din limba engleză de Mircea Soare
7.	Simionescu, I., Dranga, M., Moise, M.	-	*Metode numerice în tehnică. Aplicaţii în Fortran*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995
8.	Marin, C., Hadar, A., Voicu, A., Petre, C	-	*Metode numerice în inginerie.* Editura Politehnica Press , Bucureşti 2005
9.	Marin, C.	-	REZISTENȚA MATERIALELOR Partea I - Solicitări simple. Editura Bibliotheca Târgoviște 2013
10.	Marin, C. Filip, V., Huidu, T., Negrea, A.	-	MECANICĂ CLASICĂ ŞI MODERNĂ, Editura Valahia University Press, Târgovişte 2009,
11.	Marin, C.	-	PROBLEME TIP DE REZISTENȚA MATERIALELOR REZOLVATE ÎN MATHCAD, Editura Bibliotheca, Târgovişte 2012,
12.	Marin, C., Hadar, A., Popa, F., Albu, L.	-	MODELAREA CU ELEMENTE FINITE A STRUCTURILOR MECANICE, Editura ACADEMIEI şi Editura AGIR Bucureşti, 2002,
13.	Popa, F., Marin, C., Filip, V.	-	MODELAREA ŞI SIMULAREA SISTEMELOR ROBOTICE, Editura Bibliotheca Târgovişte, 2005